สมการเชิงอนุพันธ์
(Differential Equation)

1. Ordinary Differential Equations (ODEs)

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ตัวแปรต้น (อิสระ) ⇒ Independent variable ⇒ t, x, y, z

ตัวแปรตาม (ไม่อิสระ) ⇒ Dependent variable ⇒ e.g. u, v, w, T, r

การเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตาม ที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรต้น แค่ 1 ตัวแปร

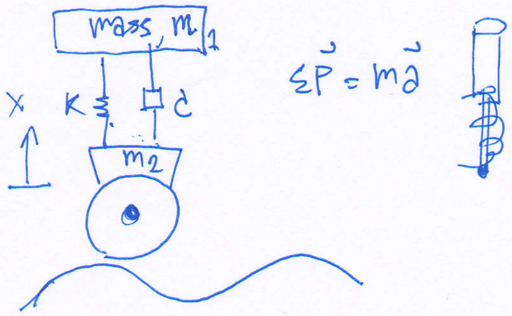
$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

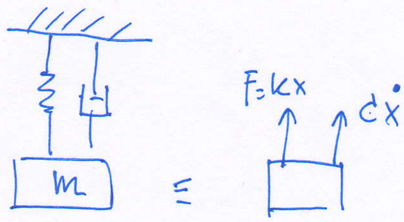
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{dm}{dt} = km$$

$$\frac{dT}{dt} = k[T - T_a]$$





- สมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของวัตถุ

⇒ Rectilinear motion (การเคลื่อนที่วิถีตรง)

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

$$dt = \frac{ds}{v} \qquad a = \frac{dv}{ds/v} \Rightarrow ads = vdv$$

$$a = v\frac{dv}{ds}$$

เมื่อวัตถุ เคลื่อนที่ด้วย ความ เร่ง (a) คงที่

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\int_0^t a\,dt = \int_u^v dv \qquad ; \quad a = \text{คงที่}$$

$$at = v - u$$

$$\boxed{v = u + at}$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$u + at = \frac{ds}{dt}$$

$$\int_0^t [u + at]\,dt = \int_{s_0}^{s} ds \qquad ; \quad u = \text{ความเร็วต้น}$$

$$ut + \frac{at^2}{2} = s - s_0$$

$$\boxed{s - s_0 = ut + \frac{1}{2}at^2}$$

$$a\,ds = v\,dv$$

$$\int_{s_0}^{t} a\,ds = \int_u^v v\,dv$$

$$a[s - s_0] = \frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2}$$

$$\boxed{v^2 = u^2 + 2a[s - s_0]}$$

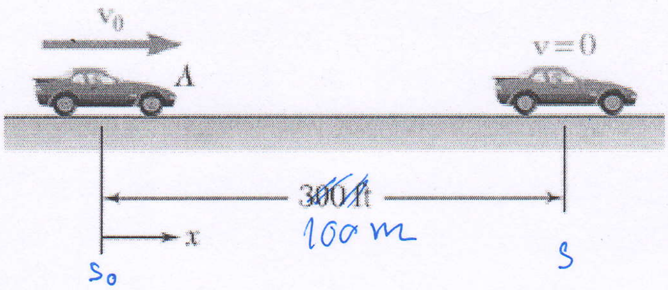
PROBLEM 11.9

The brakes of a car are applied, causing it to slow down at a rate of 3 m/s². Knowing that the car stops in 100 m, determine (*a*) how fast the car was traveling immediately before the brakes were applied, (*b*) the time required for the car to stop.

$a =$ คงที่

$a = -3$

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= u^2 + 2a[s - s_0] \\ v &= u + at \\ s - s_0 &= ut + \tfrac{1}{2}at^2 \end{aligned}\right\} a = \text{คงที่}$$



a.

$$v^2 = u^2 + 2a[s - s_0] = u^2 + 2a[\underbrace{x - x_0}_{100}]$$

$$0^2 = u^2 + 2(-3)[100]$$

$$u = 24.49 \quad m/s \ ※$$

b.

$$v = u + at$$

$$0 = 24.49 + (-3)t$$

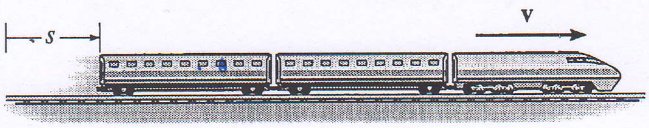
$$t = 8.16 \quad s \ ※$$

914

***12-12.** When a train is traveling along a straight track at 2 m/s, it begins to accelerate at $a = (60v^{-4})$ m/s^2, where v is in m/s. Determine its velocity v and the position 3 s after the acceleration.

$t = 3$

$a = \dfrac{60}{v^4}$



$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{60}{v^4}$$

$$\int_{v=2}^{v} \frac{v^4}{60}\, dv = \int_0^3 dt$$

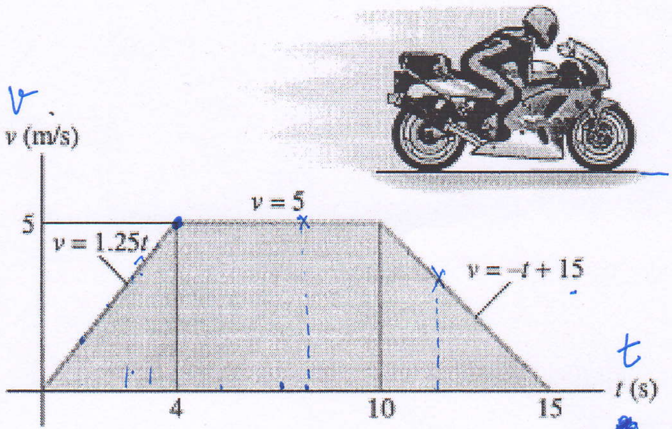
$$\frac{1}{60}\left[\frac{v^5}{5} - \frac{2^5}{5}\right] = 3$$

$$\frac{1}{300}\left[v^5 - 2^5\right] = 3$$

$$v = 3{,}925 \text{ m/s}$$

9/5

***12-44.** A motorcycle starts from rest at $s = 0$ and travels along a straight road with the speed shown by the v-t graph. Determine the motorcycle's acceleration and position when $t = 8$ s and $t = 12$ s.



v-$t \Rightarrow a, s$

$v = \frac{ds}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt}$, $a = \frac{v\,dv}{ds}$

• $t = 8$ s $\Rightarrow$ $a = \frac{dv}{dt}$ $\Rightarrow$ ความเร็วใน 4 - 10 วินาที ความเร็วคงที่

$a = 0$ ※

• $\Rightarrow$ $v = \frac{ds}{dt}$

$$\int_0^8 v\,dt = \int_0^s ds$$

$$\int_0^4 [1.25t]\,dt + \int_4^8 5\,dt = \int_0^s ds$$

$$1.25\left[\frac{t^2}{2}\right]\Bigg|_0^4 + 5t\Bigg|_4^8 = s$$

$$1.25 \times \frac{4^2}{2} + \overbrace{[5 \times 8 - 5 \times 4]}^{20} = s$$

$s = 30$ m ※

- $t = 12$ s $\Rightarrow$ $a = \dfrac{dv}{dt}$ $\Rightarrow$ ความเร็วในช่วง 10 – 15 วินาที

$$v = -t + 15$$

$$a = \frac{d[-t+15]}{dt}$$

$$a = -1 \quad m/s^2$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{ds}{dt_s}$$

$$\int_0^{12} v\,dt = \int_0^{s} ds$$

$$\int_0^4 1.25t\,dt + \int_4^{10} 5\,dt + \int_{10}^{12} (-t+15)\,dt = S$$

$$1.25\frac{t^2}{2}\Big|_0^4 + 5t\Big|_4^{10} - \frac{t^2}{2}\Big|_{10}^{12} + 15t\Big|_{10}^{12} = S$$

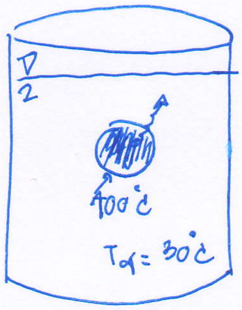
$$S = 1.25 \times \frac{4^2}{2} + [5\times10 - 5\times4] - \left[\frac{12^2}{2} - \frac{10^2}{2}\right] + [15\times12 - 15\times10]$$

$$S = 10 + 30 - 22 + 30$$

$$s = 48 \quad m$$

• สมการเชิงอนุพันธ์ ที่เกี่ยวกับ การถ่ายเทความร้อน

<u>ตัวอย่าง</u>



นำโลหะขนาดเล็ก ซึ่งมีอุณหภูมิเริ่มต้น 100 °C ไปจุ่มในอ่าง ที่ในอ่างมีอุณหภูมิ 30 °C ทำอุณหภูมิของโลหะ ลดลงเหลือ 70 °C เมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที จงหา เวลาที่ทำให้ โลหะมีอุณหภูมิ 31 °C

Newton cooling Law

$$\dot{Q} \approx hA[T - T_\alpha]$$

$$\dot{Q} = hA_s[T - T_\alpha] \quad ; A_s = \text{Surface area}$$

$$mc\frac{\Delta T}{\Delta t} = hA_s[T - T_\alpha] \quad ; c = \text{specific Heat capacity}$$

$\Delta t \to 0$

$$mc\frac{dT}{dt} = hA_s[T - T_\alpha]$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{hA_s}{mc}[T - T_\alpha]$$

$$\frac{dT}{dt} = k[T - T_\alpha] \quad ; k = \frac{hA_s}{mc} = \text{ค่าคงที่}$$

$$\frac{1}{T - T_\alpha}\, dT = k\,dt$$

$$\int \frac{1}{T - T_\alpha}\, dT = \int k\,dt$$

ให้ $u = T - T_a$

$$\frac{du}{dT} = 1 \Rightarrow dT = du$$

ดังนั้น สมการจะเปลี่ยนไป

$$\int \frac{1}{u}\, du = \int k\,dt$$

$$\ln u = kt + c$$

$$e^{\ln u} = e^{kt+c}$$

$$u = e^{kt} \cdot e^{c} \; ; \text{ ให้ } A = e^{c}$$

$$u = Ae^{kt}$$

แทน $u = T - T_a$

$$T - T_a = Ae^{kt}$$; T = อุณหภูมิของโลหะ, $T_a = 30^\circ C$

จากค่าเริ่มต้น $t = 0$, $T = 100^\circ C$

$$100 - 30 = Ae^{k(0)}$$

$$\boxed{70 = A}$$

โจทย์ระบุ เมื่อ $t = 3$, $T = 70^\circ C$

$$70 - 30 = 70e^{k(3)}$$

$$40 = 70e^{3k}$$

$$\frac{40}{70} = e^{3k}$$

$$\ln \frac{40}{70} = \ln e^{3k}$$

$$\ln \frac{40}{70} = 3k$$

$$k = -0.1865$$

สมการ การลดลง ของ อุณหภูมิ โลหะ

$$T - 30 = 70e^{-0.1865t}$$

$$T = 30 + 70e^{-0.1865t}$$

ถ้า $T = 31^{\circ}C \Rightarrow t = ?$

$$31 = 30 + 70e^{-0.1865t}$$

$$\frac{1}{70} = e^{-0.1865t}$$

$$\ln\frac{1}{70} = \ln e^{-0.1865t}$$

$$-0.1865t = \ln\frac{1}{70}$$

$$t = 22.78 \text{ s.}$$ ✲

นำสมการ $T = 30 + 70e^{-0.1865t}$ ไปพล็อต กราฟ จะได้ กราฟ ตามรูป ด้านล่าง